

2 Grundgleichungen der Flächentragwerke

2.1 Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums

Im folgenden Kapitel wird ein kurzer Einblick in die nichtlineare Kontinuumsmechanik gegeben, um die Grundlagen für die weiteren Untersuchungen bereitzustellen. Auf eine ausführliche Herleitung wird dabei verzichtet. Die Zusammenstellung orientiert sich hauptsächlich an Malvern [84], Ciarlet [37], Marsden und Hughes [83] und Green und Zerna [59]. Die Gleichungen werden im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit zum Teil in der Indexschreibweise vorgestellt. Dabei ist entsprechend der Summationskonvention über einen Index zu summieren, falls er in einem Produkt gegenständig auftritt.

2.1.1 Kinematik

Ein Körper ist eine beschränkte Menge von materiellen Punkten Ω . Die Oberfläche (bzw. der Rand) des Körpers wird mit Γ bezeichnet. Der Rand setzt sich aus Bereichen mit vorgegebenen Verschiebungen (Dirichlet Rand) Γ_D und mit vorgeschriebenen Spannungen (Neumann Rand) Γ_N zusammen. Eine Deformation $\bar{\mathbf{x}}$ ist eine Abbildung des Körpers von der Referenzkonfiguration Ω in die Momentankonfiguration $\bar{\Omega}$.

$$\bar{\mathbf{x}} : \Omega \rightarrow \bar{\Omega} \quad (2.1)$$

Die Position eines Punktes in Ω wird mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ und in $\bar{\Omega}$ mit $\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ angegeben (Bild 2.1). Dabei sind θ^1 , θ^2 und θ^3 die Koordinaten bezüglich eines mitgehenden krummlinigen Koordinatensystems. Die Differenz der Ortsvektoren in beiden Konfigurationen ist der Verschiebungsvektor \mathbf{u} .

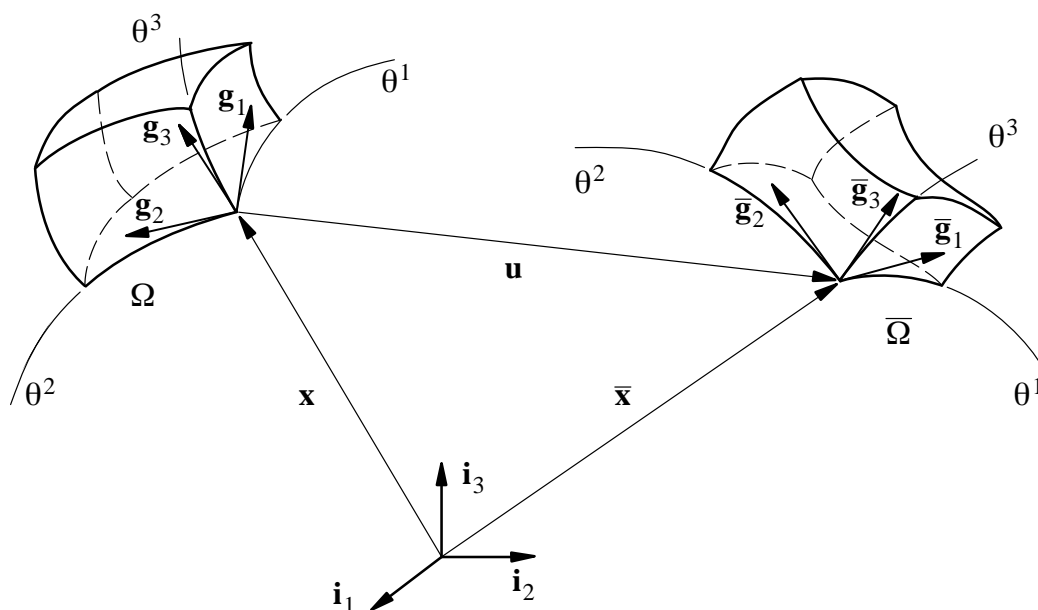


Bild 2.1: Kinematik des Kontinuums

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (2.2)$$

Die ortsabhängigen kovarianten Basisvektoren für das krummlinige Koordinatensystem der Referenzkonfiguration \mathbf{g}_i und der Momentankonfiguration $\bar{\mathbf{g}}_i$ sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad \bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \quad (2.3)$$

Die Basisvektoren der Referenzkonfiguration \mathbf{g}_i werden mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} in die Momentankonfiguration abgebildet.

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \mathbf{g}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{g}}_i \quad (2.4)$$

Ein für die weiteren Betrachtungen wichtiger Ausdruck ist die Differenz der Quadrate der infinitesimalen Linienelemente ds in der Referenzkonfiguration und $d\bar{s}$ in der Momentankonfiguration.

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j d\theta^i d\theta^j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j d\theta^i d\theta^j \\ &= (\bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) d\theta^i d\theta^j \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Terme in der Klammer werden als Metriktensoren \bar{g}_{ij} und g_{ij} der beiden Konfigurationen bezeichnet.

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad \bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \cdot \bar{\mathbf{g}}_j \quad (2.6)$$

Die Differenz $d\bar{s}^2 - ds^2$ beschreibt, wie sich die Länge der Linienelemente bei der Deformation ändert. Deshalb wird sie für die Definition des Green–Langrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} verwendet.

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 - ds^2 &= (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) d\theta^i d\theta^j = 2\mathbf{E} d\theta^i d\theta^j \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Gebäuchlich ist auch die Darstellung des Verzerrungstensors in Abhängigkeit der Verschiebungen \mathbf{u} und der Referenzbasis \mathbf{g}_i .

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) \quad \text{mit } (\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta^i} \quad (2.8)$$

Für kleine Verschiebungen wird der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ verwendet.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \quad (2.9)$$

Die Linearisierung wurde hierbei am undeformierten Zustand $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ durchgeführt.

2.1.2 Statik

Aus dem Bilanzsatz der Impulserhaltung wird das statische Kräftegleichgewicht für einen ruhenden Körper $\bar{\Omega}$ in der Momentankonfiguration hergeleitet.

$$\int_{\bar{\tau}} \bar{\mathbf{p}} \, d\bar{x} + \int_{\bar{\kappa}} \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{o} = 0 \quad (2.10)$$

Dabei ist der Teilkörper $\bar{\tau}$ mit dem Rand $\bar{\kappa} = \partial\bar{\tau}$ eine beliebige Untermenge des Körpers $\bar{\Omega}$. Weiterhin ist $\bar{\mathbf{p}}$ der äußere Volumenkraftvektor und $\bar{\mathbf{t}}$ ist der auf der Oberfläche $\bar{\kappa}$ angreifende Kraftvektor. Auf dem Neumann Rand $\bar{\kappa}_N$ mit $\bar{\kappa}_N \subseteq \bar{\Gamma}_N$ ist der Kraftvektor $\bar{\mathbf{t}}$ gleich dem äußeren Lastvektor $\bar{\mathbf{f}}$.

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{auf} \quad \bar{\kappa}_N \quad (2.11)$$

Der Kraftvektor an der Oberfläche $\bar{\kappa}$ läßt sich auch aus dem Cauchy Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ mit der zugehörigen Flächennormale $\bar{\mathbf{n}}$ berechnen.

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} \quad \text{Cauchy Theorem} \quad (2.12)$$

Nach Einsetzen in die Impulserhaltungsgleichung (2.10) und anschließender Anwendung des Gausschen Integralsatzes wird das Gleichgewicht mit einem Gebietsintegral in der Momentan-konfiguration beschrieben.

$$\int_{\bar{\tau}} (\bar{\mathbf{p}} + \overline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma}) \, d\bar{x} = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Das integrale Gleichgewicht gilt für beliebige Teilkörper $\bar{\kappa} \subset \bar{\Omega}$ und folglich muß der Integrand der folgenden differentiellen Gleichgewichtsbedingung genügen.

$$\bar{\mathbf{p}} + \overline{\text{div}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{f}} \quad \text{auf} \quad \bar{\Gamma}_N \quad (2.14)$$

Die Symmetrie des Cauchy–Spannungsvektors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.15)$$

folgt aus dem Drallerhaltungssatz. In der Differentialgleichung (2.14) sind alle Größen bezüglich der unbekanntenen Momentankonfiguration definiert. Für numerische Berechnungen sind jedoch die in der Referenzkonfiguration formulierten statischen Gleichgewichtsbedingungen vorteilhafter. Wird die Impulserhaltung bezüglich der Referenzkonfiguration betrachtet,

$$\int_{\tau} \mathbf{p} \, dx + \int_{\kappa} \mathbf{t} \, do = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

so kann eine weitere differentielle Gleichgewichtsbedingung aufgestellt werden.

$$\text{div} \mathbf{P} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} \mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{auf} \quad \Gamma_N \quad (2.17)$$

\mathbf{P} sind die aus den Cauchy–Spannungen mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} berechneten 1. Piola–Kirchhoff Spannungen. Aus der folgenden Darstellung des 1. PK Spannungstensors \mathbf{P} , in Abhängigkeit der Cauchy Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und des Deformationsgradienten \mathbf{F} , wird die Unsymmetrie ersichtlich.

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = (\det \mathbf{F}) \sigma^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j = P^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.18)$$

Die Multiplikation mit dem inversen Deformationsgradienten transformiert den 1. PK Spannungstensor \mathbf{P} in den symmetrischen 2. PK Spannungstensor \mathbf{S} .

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = (\det \mathbf{F})\sigma^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.19)$$

Damit lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen in folgender Form schreiben.

$$\operatorname{div}(\mathbf{FS}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\mathbf{FS})\mathbf{n} = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Gamma_N \quad (2.20)$$

Für lineare bzw. am Referenzzustand linearisierte Gleichungen sind die vorgestellten Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungsmaße identisch.

Die Differentialgleichungen (2.14), (2.17) und (2.20) werden als die starke Form der Gleichgewichtsbedingungen bezeichnet. Äquivalent dazu wird nach der Multiplikation der starken Form z.B. Gleichung (2.17) mit einer Testfunktion \mathbf{v} und anschließender Integration eine schwache Form hergeleitet.

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \subset H^1(\Omega) \quad (2.21)$$

Die Elemente des Funktionenraums V erfüllen die Bedingung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ auf Γ_D . Die Bezeichnungen "schwache Form" und "Prinzip der virtuellen Verschiebungen" werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit als gleichbedeutend angesehen. Mittels partieller Integration wird die schwache Form in eine gebräuchlichere Darstellung überführt.

$$\int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.22)$$

Für die numerischen Berechnungen stellt meist die schwache Form, formuliert in den symmetrischen 2.PK Spannungen und den linearisierten Green–Langrangeschen Verzerrungen, den Ausgangspunkt dar.

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.23)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die schwache Form in der gesamten Arbeit folgendermaßen dargestellt.

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.24)$$

$A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sind dabei die inneren virtuellen Arbeiten:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.25)$$

Die äußeren virtuellen Arbeiten werden mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) berechnet.

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, do \quad (2.26)$$

Bei linearen Problemen wird die innere virtuelle Arbeit anstatt mit dem nichtlinearen Operator A mit der Bilinearform $B(\cdot, \cdot)$ bestimmt.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \, dx \quad (2.27)$$

2.1.3 Materialgesetze

Mit den konstitutiven Gleichungen werden die voneinander unabhängig vorgestellten kinematischen Gleichungen mit den statischen Gleichungen gekoppelt. Aus den Gleichungssätzen zur Beschreibung der Kinematik, der Statik und des Werkstoffverhaltens werden die drei Lamé–Navierschen Differentialgleichungen zur Berechnung der drei unbekanntenen Verschiebungen hergeleitet.

2.1.3.1 Lineares isotropes Materialgesetz

Das einfachste Werkstoffmodell ist das des isotropen elastischen St. Venant–Kirchhoff Materials. Das Modell beinhaltet die zwei Lamé–Parameter λ und μ , die experimentell bestimmt werden können. Der vierstufige Werkstofftensor \mathbf{C} läßt sich in der folgenden Form angeben.

$$\mathbf{C} = \left(\lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \right) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \quad (2.28)$$

Anstelle der Parameter λ und μ werden häufig auch die Werkstoffkenngrößen E , G und ν verwendet.

$$\mu = G, \quad \lambda = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad E = 2G(1 + \nu) \quad (2.29)$$

Aus den Greenschen Verzerrungen \mathbf{E} lassen sich mit dem Werkstofftensor \mathbf{C} die 2.Piola–Kirchhoff Spannungen \mathbf{S} bestimmen.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.30)$$

Bei Beschränkung auf kleine Verschiebungen gilt die gleiche Beziehung zwischen den Spannungsgrößen und dem linearisierten Verzerrungstensor.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.31)$$

2.1.3.2 Elastoplastisches Materialgesetz

Die natürlichen Werkstoffe weisen ein mehr oder weniger ausgeprägtes nichtlineares Verhalten auf. Im folgenden werden die aufgrund von inelastischem (bzw. plastischem) Werkstoffverhalten entstehenden Nichtlinearitäten näher untersucht. Ein Überblick über die verschiedenen Modelle und die Grundlagen wird u.a. in den Büchern von Simo und Hughes [120], Lubliner [81] und Hill [63] vorgestellt. Bei der Plastizität sind die Spannungen außer von den augenblicklichen Verzerrungen noch von der Belastungsgeschichte des jeweiligen Punktes abhängig. Für inelastische Körper mit kleinen Verzerrungen werden die Verzerrungen additiv in einen elastischen $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ und plastischen Anteil $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ zerlegt.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (2.32)$$

Erst nach Erreichen eines von der Fließbedingung F vorgegebenen kritischen Belastungszustandes können plastische Verzerrungen entstehen.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) \leq 0 \quad (2.33)$$

Außer von den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Fließbedingung noch von einem internen Materialparameter ζ abhängig. Für die Beschränkung auf kleine Deformationen ist die Unterscheidung zwischen den verschiedenen Spannungstensoren nicht erforderlich. Die plastischen Dehnungen $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ und die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ sollen im folgenden das von von Mises formulierte Postulat der maximalen plastischen Dissipation erfüllen.

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\text{symmetrische Tensoren mit } F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) \leq 0\} \quad (2.34)$$

Eine anschaulichere Form wird nach Umschreiben der Ungleichung gewonnen.

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \geq \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \{\text{symmetrische Tensoren mit } F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) \leq 0\} \quad (2.35)$$

Danach nimmt die wirklich aufgewandte Deformationsleistung $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ ein Maximum gegenüber allen anderen möglichen Leistungsbeträgen $\boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ an, die bei der gleichen Deformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ erbracht würden. Die Konvexität des elastischen Bereiches sowie die Normalität der plastischen Dehnungen an der Fließfläche sind Konsequenzen des Postulates der maximalen Dissipation. Weiterhin ist eine Änderung der plastischen Dehnungen nur für die Spannungen auf der Fließfläche mit $F(\boldsymbol{\tau}, \zeta) = 0$ möglich. Die inkrementellen plastischen Verzerrungen $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ werden in Abhängigkeit eines noch zu bestimmenden Faktors $\dot{\gamma}$ infolge der Normalität auf die Fließfläche folgendermaßen berechnet.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.36)$$

Es werden auch nicht assoziierte Plastizitätsmodelle diskutiert, die der Normalitätsbedingung von Gleichung (2.36) nicht genügen. Die inkrementelle interne Variable $\dot{\zeta}$ wird für assoziierte Plastizität entsprechend den plastischen Verzerrungen bestimmt.

$$\dot{\zeta} = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \quad (2.37)$$

Da plastische Verzerrungen nur für Spannungen auf der Fließfläche möglich sind, muß während der plastischen Deformation die Konsistenzbedingung mit

$$\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = 0 \quad (2.38)$$

gelten. Die Konsistenzbedingung führt nach einigen Rechenschritten auf eine Bestimmungsgleichung für die Unbekannte $\dot{\gamma}$.

$$\dot{\gamma} = \left\{ \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{H} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\dot{\zeta}}{\dot{\gamma}} \quad (2.39)$$

Nachdem die plastischen Verzerrungen und die internen Variablen mit den Gleichungen (2.36) und (2.37) bekannt sind, gilt die folgende inkrementelle konstitutive Beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{ep}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left(\mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{\mathbf{H} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.40)$$

Führt die inkrementelle Deformation nicht auf plastische Verzerrungen, so gilt weiterhin das elastische Werkstoffgesetz.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.41)$$

Um die Gleichungen (2.39) und (2.40) auszuwerten, ist die Fließbedingung und die Verfestigungsannahme genauer zu beschreiben. Die Menge der zulässigen Spannungskombinationen wird mit der Fließbedingung vorgegeben. Die genaue Form der Fließbedingung wird anhand von experimentellen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen festgelegt (Erfüllen des Postulats der maximalen plastischen Dissipation). Das plastische Verhalten von metallischen Materialien ist zum Beispiel unabhängig vom hydrostatischen Druck σ_m . Daraus folgt die Unabhängigkeit der Fließbedingung von der ersten Invarianten des Spannungstensors. Bei dem von Mises Kriterium wird die zur zweiten Invarianten proportionale Gestaltsänderungsarbeit als die maßgebliche Beanspruchung für die Plastizität verwendet.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \zeta) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_Y(\zeta) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{I} \quad (2.42)$$

Dabei ist $\sigma_Y(\zeta)$ die von der internen Variablen ζ abhängige einaxiale Fließspannung. Die interne Variable ist bei der Verzerrungsverfestigungshypothese von der Invarianten der plastischen Dehnungen abhängig.

$$\dot{\zeta} = \int_0^T \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} dt \quad (2.43)$$

Der Term unter der Wurzel ist im wesentlichen die zweite Invariante der plastischen Dehnungen. Für die von Mises Plastizität und die Verfestigungsannahme nach Gl. (2.43) ist die inkrementelle interne Variable $\dot{\zeta}$ gleich dem plastischen Multiplikator $\dot{\gamma}$.

$$\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\gamma}^2 \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\gamma} \quad (2.44)$$

Damit gilt für den Verfestigungsmodul H in Gleichung (2.39):

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \zeta} \quad (2.45)$$

Der Verfestigungsmodul H ist eine Werkstoffeigenschaft und wird experimentell z.B. aus einem eindimensionalen Zugversuch ermittelt. Für den eindimensionalen Fall ist der Verfestigungsparameter infolge der Gleichungen (2.36) und (2.44) gleich den plastischen Verzerrungen, so daß sich H aus der Spannungsdehnungskurve mit der folgenden Beziehung ergibt.

$$H = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \epsilon^P} \quad (2.46)$$

2.2 Grundgleichungen der nichtlinearen Schalentheorie

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der verwendeten Schalentheorie lediglich kurz zusammengestellt. Ausführlichere Darstellungen finden sich u.a. in Ramm [103], Büchter [34], Basar et al. [22] und Simo et al. [119].

2.2.1 Kinematik der nichtlinearen Schalentheorie

Der Ortsvektor \mathbf{x} zu einem Punkt des Schalenraums kann in Abhängigkeit des Ortsvektors \mathbf{r} der Schalenmittelfläche, des dazugehörigen Direktors \mathbf{a}_3 und einer weiteren Variablen θ^3 beschrieben werden (siehe Bild 2.2).

$$\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad \text{mit } -1 \leq \theta^3 \leq 1, \quad \|\mathbf{a}_3\|_0 = \frac{d}{2} \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnet d die Dicke der Schale. Das dreidimensionale Kontinuum wird mittels geeigneter Annahmen über den Verschiebungsverlauf in Dickenrichtung auf ein zweidimensionales Flächentragwerk reduziert. Wird der Verschiebungsverlauf über die Dicke linear angenommen, so kann ein Punkt des deformierten Gebietes mit dem folgenden Ortsvektor dargestellt werden.

$$\bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{r}}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \quad \text{mit } -1 \leq \theta^3 \leq 1, \quad \|\bar{\mathbf{a}}_3\|_0 = \frac{d}{2} \quad (2.48)$$

Die Verschiebungen ergeben sich aus der Differenz der Gleichungen (2.47) und (2.48).

$$\mathbf{u}^*(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{u}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (2.49)$$

Zur Beschreibung der Kinematik werden bei einem inextensiblen Direktor insgesamt fünf Variablen benötigt. Außer den drei Verschiebungen der Mittelfläche \mathbf{u} sind zwei weitere Parameter zur Beschreibung der Verschiebungen \mathbf{w} bzw. Rotationen des inextensiblen Direktors \mathbf{a}_3 erforderlich (Reissner–Mindlin Kinematik).

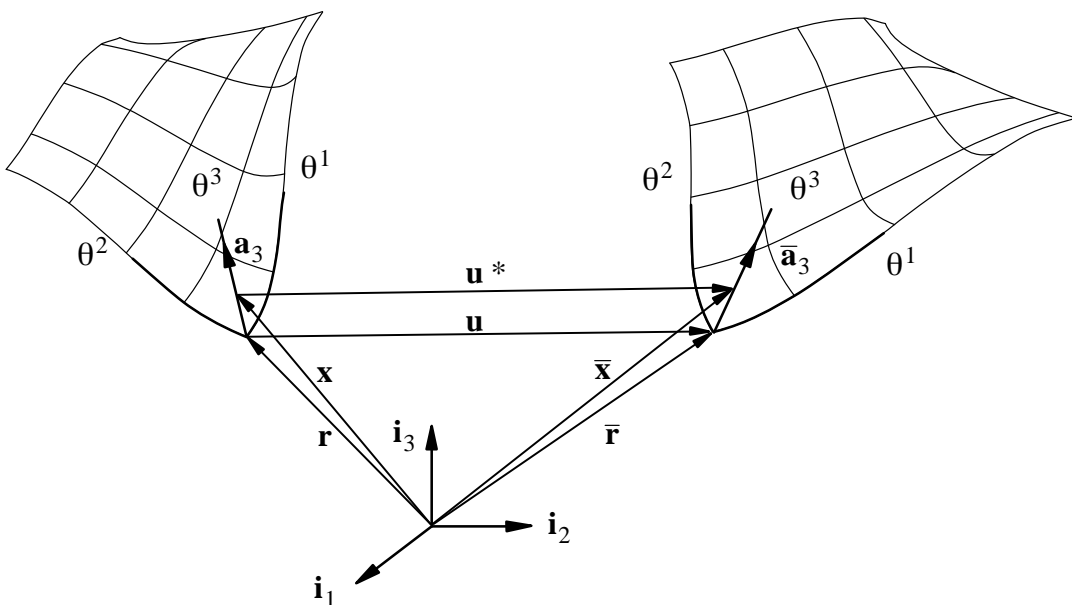


Bild 2.2: Schalenkinematik

Die Verzerrungen sind wie bei dreidimensionalen Kontinua mit der Differenz der kovarianten Metrik im Referenz- und im deformierten Zustand definiert. Dazu werden zunächst die kovarianten Basisvektoren im undeformierten und deformierten Zustand mit Hilfe der Ortsvektoren \mathbf{x} und $\bar{\mathbf{x}}$ aufgestellt.

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^3} = \mathbf{a}_3 \quad (2.50)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{g}}_3 = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^3} = \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (2.51)$$

Die kovariante Basis \mathbf{a}_α bildet dabei eine Tangentialebene auf die undeformierte Schalenmittelfläche. Die Basis $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ gilt entsprechend für den verformten Zustand. Die Green-Lagrangeschen Verzerrungen bestimmen sich aus der Differenz der Metriktensoren nach Gleichung (2.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_{ij} - \mathbf{g}_{ij}) \\ \mathbf{E} &= \alpha_{ij} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta) \\ \alpha_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\gamma_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3) \\ \beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dabei ist $\alpha_{\alpha\beta}$ der Membranverzerrungstensor, γ_α ist der Schubverzerrungstensor und $\beta_{\alpha\beta}$ ist der Krümmungstensor. Bei kleinen Verzerrungen kann der über θ^3 quadratische Anteil vernachlässigt werden. Eine genaue Diskussion dieser Vereinfachung wird u.a. von Büchter [34] gegeben.

Im weiteren werden häufig auch die linearisierten Verzerrungsgleichungen verwendet. Die am deformierten Zustand $\bar{\mathbf{x}}$ bezüglich des Zustandes $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$ linearisierten Gleichungen (2.53) lassen sich folgendermaßen bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \bar{\mathbf{a}}_\gamma &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta) \\ \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\beta} \bar{\mathbf{a}}_\beta + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_3} \bar{\mathbf{a}}_3 &= (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3) \\ \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \bar{\mathbf{a}}_\gamma + \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{3,\gamma}} \bar{\mathbf{a}}_{3,\gamma} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Die linearisierten Gleichungen liefern auch die Verzerrungsgleichungen der linearen Theorie. Beispielsweise gilt für die Membranverzerrungen $\hat{\alpha}_{\alpha\beta}$ der linearen Theorie:

$$\hat{\alpha}_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma}(\bar{\mathbf{a}}_\gamma - \mathbf{a}_\gamma) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - 2\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta)$$

Der Schubverzerrungstensor $\hat{\gamma}_\alpha$ und der Membranverzerrungstensor $\hat{\beta}_{\alpha\beta}$ der linearen Theorie werden mit den entsprechenden Gleichungen hergeleitet.

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_\alpha &= (\mathbf{a}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3) \\ \hat{\beta}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha \\ &\quad - 2\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta - 2\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha)\end{aligned}\quad (2.55)$$

2.2.2 Statik der nichtlinearen Schalentheorie

Die Schnittgrößen der Schale ergeben sich durch Integration der Spannungen über die Dicke der Schale. Zum Beispiel werden die 1. Piola Kirchhoff Schnittkräfte \mathbf{n}^α bzw. –momente \mathbf{m}^α aus den 1.PK Spannungen an einer Schnittfläche mit der Flächennormalen \mathbf{n}_β folgendermaßen bestimmt [34].

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_s P^{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta \, d\theta^3 \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu_s (\mathbf{a}_3 \times P^{\alpha\beta} \mathbf{n}_\beta) \theta^3 \, d\theta^3 \quad (2.56)$$

Die Schnittfläche mit der Normale \mathbf{n}_β wurde dabei zur Vereinfachung längs einer Parameterlinie $\theta^1 = \text{const.}$ oder $\theta^2 = \text{const.}$ gelegt. Die Krümmung der Schale geht mit dem Faktor μ_s in die Integration ein.

$$\mu_s = \frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} \quad (2.57)$$

Weiterhin zerlegt man die Schnittgrößenvektoren \mathbf{n}^α und \mathbf{m}^α in Richtung der unverformten Basis.

$$\mathbf{n}^\alpha = n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + q^\alpha \mathbf{a}_3 \quad (2.58)$$

$$\mathbf{m}^\alpha = m^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta + m^{\alpha 3} \mathbf{a}_3 \quad (2.59)$$

$n^{\alpha\beta}$, q^α und $m^{\alpha\beta}$ werden als Piola–Kirchhoff Schnittgrößen 1. Art bezeichnet. Dabei sind $n^{\alpha\beta}$ die Komponenten des Dehnungskrafttensors, q^α die des Querkrafttensors und $m^{\alpha\beta}$ die des Momententensors. Die statischen Gleichungen für die Schalentheorie leiten sich aus den Gleichgewichtsbedingungen Gl. (2.17) für das dreidimensionale Kontinuum ab.

$$\text{div } \mathbf{P} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_D$$

Nach einer Integration über die Dicke und unter Verwendung der Definitionen für die 1.PK–Schnittgrößen (Gl. (2.56)) ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Schale [22]:

$$\begin{aligned}n^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\alpha b_\alpha^\beta + p^\beta &= 0 \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\alpha|_\alpha + p^3 &= 0 \\ m^{\alpha\beta}|_\alpha - q^\alpha (\delta_\alpha^\beta + \varphi_\alpha^\beta) + m^{\alpha 3} \epsilon^{\beta\lambda} b_{\alpha\lambda} &= 0\end{aligned}\quad (2.60)$$

Dabei ist b_α^β der Krümmungstensor,

$$\mathbf{b}_\alpha^\beta = (\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}^\lambda) \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\lambda,\alpha} \quad (2.61)$$

und $\epsilon^{\lambda\beta}$ der Permutationstensor,

$$\epsilon^{\lambda\beta} = (\mathbf{a}^\lambda \cdot \mathbf{a}^\alpha)(\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}^\rho) \epsilon_{\alpha\rho} = (\mathbf{a}^\lambda \cdot \mathbf{a}^\alpha)(\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}^\rho) \|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

\mathbf{p}^β und \mathbf{p}^3 sind die auf den Referenzzustand bezogenen äußeren Belastungen und φ_α^β ist der Deformationsgradient. Mit $\cdot|_\alpha$ wird die kovariante Ableitung bezüglich der Koordinate θ^α bezeichnet, die für ein- bzw. zweistufige Tensoren folgendermaßen lautet.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^\alpha|_\alpha &= \mathbf{q}_{,\alpha}^\alpha + \mathbf{q}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \\ \mathbf{n}^{\alpha\beta}|_\alpha &= \mathbf{n}_{,\alpha}^{\alpha\beta} + \mathbf{n}^{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha + \mathbf{n}^{\alpha\rho} \Gamma_{\alpha\rho}^\beta \end{aligned} \quad (2.63)$$

Das Cristoffelsymbol $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ ergibt sich aus dem Produkt der Ableitungen von kovarianter Basisvektoren mit den kontravarianten Basisvektoren.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma$$

Die ersten beiden Gleichungen in Gl.(2.60) beschreiben das Gleichgewicht in Richtung der Basisvektoren \mathbf{a}_β und der Schalennormale \mathbf{a}_3 , die dritte Gleichung das Momentengleichgewicht um die Basisvektoren \mathbf{a}_β .

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bzw. die schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen wird wie die starke Form aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Kontinua hergeleitet. Für numerische Berechnungen eignet sich auch bei Schalen besonders die Darstellung mit den 2. Piola Kirchhoff–Schnittgrößen und den Greenschen Verzerrungen.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \left[\mathbf{N}^{\alpha\beta} \frac{\partial \alpha_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{v}) + \mathbf{Q}^\alpha \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\beta} \mathbf{a}_\beta(\mathbf{v}) + \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{a}}_3} \mathbf{a}_3(\mathbf{v}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M}^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_\gamma} \mathbf{a}_\gamma(\mathbf{v}) + \frac{\partial \beta_{\alpha\beta}}{\partial \bar{\mathbf{a}}_{3,\gamma}} \mathbf{a}_{3,\gamma}(\mathbf{v}) \right) \right] dx \quad \text{mit } \mathbf{v} \in \mathbf{V} \subset H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$\mathbf{N}^{\alpha\beta}$, \mathbf{Q}^α und $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$ sind die den 1.PK Schnittgrößen $\mathbf{n}^{\alpha\beta}$, \mathbf{q}^α und $\mathbf{m}^{\alpha\beta}$ entsprechenden 2.PK Schnittgrößen. Zwischen den beiden Schnittgrößen gelten in Abhängigkeit der Deformationsgradienten der Schale die folgenden Beziehungen (siehe z.B. Basar [22]).

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{\alpha\beta} &= \mathbf{N}^{\alpha\rho} (\delta_\rho^\beta + \varphi_{\rho\cdot}^\beta) + \mathbf{Q}^\alpha \mathbf{w}^\beta \\ \mathbf{q}^\alpha &= \mathbf{Q}^\alpha (1 + \mathbf{w}_3) + \mathbf{N}^{\alpha\beta} \varphi_{\rho 3} \\ \mathbf{m}^{\alpha\beta} &= \mathbf{M}^{(\alpha\rho)} \left[(1 + \mathbf{w}_3) (\delta_\rho^\beta + \varphi_{\rho\cdot}^\beta) - \varphi_{\rho 3} \mathbf{w}^\beta \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Die Deformationsgradienten $\varphi_{\rho\cdot}^\beta$ und $\varphi_{\alpha 3}$ werden aus der Ableitung der Verschiebungsvektoren bestimmt.

$$\varphi_{\rho\cdot}^\beta = (v_{\rho|_\alpha} + \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} v_3) \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad \varphi_{\alpha 3} = v_{3,\alpha} - (\mathbf{a}^\beta \cdot \mathbf{a}^\lambda) \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} \quad (2.66)$$

Die zur Gleichung (2.64) entsprechende schwache Form der linearen Theorie ist mit den Verzerrungsgleichungen (2.55) gegeben.

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left(N^{\alpha\beta} \hat{\alpha}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + Q^{\alpha} \hat{\gamma}_{\alpha}(\mathbf{v}) + M^{\alpha\beta} \hat{\beta}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \right) dx \quad (2.67)$$

Bemerkung:

- Infolge der Unsymmetrie der Cauchy Dehnungskräfte für die Schale kommt zu den Gleichgewichtsbedingungen (2.60) eine weitere Gleichung hinzu. Für die a-posteriori Fehlerabschätzung wurde die mögliche Unsymmetrie jedoch nicht weiter berücksichtigt.

2.2.3 Lineares Werkstoffgesetz für die Schale

Die 2. PK Spannungen werden bei kleinen Verzerrungen mit Hilfe des linearen Werkstoffensors aus den Green–Langrangeschen Verzerrungen bestimmt. Entsprechende Beziehungen gelten nach einer Dickenintegration auch für die 2. PK–Schnittgrößen. Vor der Integration müssen jedoch die Spannungen S^{33} infolge der Annahme von verschwindend kleinen Spannungen über die Dicke aus dem Werkstoffgesetz eliminiert werden. Die Komponenten des vierstufigen Werkstoffensors für den reduzierten Spannungszustand mit $S^{33} = 0$ werden u.a. von Basar [22] wie folgt angegeben.

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{1-\nu}{2} \left(a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right) \quad (2.68)$$

Daraus ergeben sich die folgenden konstitutiven Gleichungen für die Schale.

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= D_n^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\gamma\delta} & \text{mit} & & D_n^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{Ed}{1-\nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ M^{\alpha\beta} &= D_m^{\alpha\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} & \text{mit} & & D_m^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ Q^{\alpha} &= D_q^{\alpha\beta} \gamma_{\beta} & \text{mit} & & D_q^{\alpha\beta} &= \frac{Ed}{2(1+\nu)} (\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\beta}) \end{aligned} \quad (2.69)$$